

非线性系统有限时间受限控制

王继强¹, 胡忠志², YUE Hong³, DIMOROVSKI Georgi⁴

1. 2. 江苏省航空动力系统重点实验室, 南京航空航天大学能源与动力学院, 南京 210016
E-mail: {jiqiang.wang; hongzhizhi}@nuaa.edu.cn

3. Industrial Control Centre, University of Strathclyde, Glasgow G1 1XW, UK
E-mail: hong.yue@strath.ac.uk

4. Dogus University of Istanbul, Istanbul 34722, Turkey
E-mail: gdimirovski@dogus.edu.tr

摘要: 任何实际的系统均受到不同形式的限制, 例如状态受限、输入饱和等。还有一种限制是传感器或执行机构数量的不足。本文主要研究了传感器和执行机构数量不足情况下的非线性系统有限时间控制问题。针对这类问题获得了有限时间镇定控制的设计方法, 并讨论了相应的控制器的实施问题。通过对某Lorenz混沌系统的仿真应用模拟, 验证了所提出设计方法的可行有效。

关键词: 混沌控制, 有限时间镇定, 受限控制

Restricted Finite Time Control of Nonlinear Systems

WANG Jiqiang¹, HU Zhongzhi², YUE Hong³, DIMOROVSKI Georgi⁴

1. 2. Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power Systems
College of Energy & Power Engineering,
Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China
Email: jiqiang.wang@nuaa.edu.cn

3. Industrial Control Centre, University of Strathclyde, Glasgow G1 1XW, UK
E-mail: hong.yue@strath.ac.uk

4. Dogus University of Istanbul, Istanbul 34722, Turkey
E-mail: gdimirovski@dogus.edu.tr

Abstract: Any realistic system is restricted in one form or another. One of the restrictions is the lack of sensors and actuators. This paper addresses the problem of restricted control of nonlinear systems with a finite time approach. Important results are obtained on the design of controllers for stabilizing nonlinear systems in a finite time. Practical issues on control implementation are also discussed. The proposed design method is validated through its application to a Lorenz chaotic system.

Key Words: Chaos Control, Finite Time Stabilization, Restricted Control

1 引言

自1990年由E. Ott, C. Grebogi和J. A. Yorke提出的以其名字命名的OGY方法^[1]首次出现以来, 混沌系统的控制问题引起了广泛关注, 进行了大量该问题的研究^[2-6]。实际上, 关于混沌控制问题的学术著作非常丰富, 仅1997年至2000年, Fradkov汇编的关于混沌控制方面已发表参考文献著作, 就多达700多篇^[7]。因此, 混沌控制已经成为非线性动态系统理论中重要的研究内容。目前, 混沌系统的控制问题有许多解决方案^[8-12]。然而, 多数混沌系统的控制方案都需要预先已知其不稳定时序状态, 后得到其在无限时间内的控制

调节信号。但实际系统中, 通常需要在有限的给定时间内实现稳定控制, 而这就是有限时间镇定问题。

19世纪50年代, 有限时间镇定问题首次在离散控制中著名的时间最优Bang-Bang控制被提出^[13], 由于其所设计控制器具有离散性, 其在实际应用中会产生振荡。因此, 关于寻找连续有限时间镇定控制器做了大量研究^[14-17], 这些研究得到了大量关于非线性动态系统, 尤其是双积分非线性放射系统的有限时间镇定控制重要理论, 但对于混沌系统的研究相对贫乏。

文献[18-21]中研究了混沌系统的有限时间镇定问题。其中, 文献[18]提出应用自适应控制方法控制三维混沌系统。文献[19]设计了单一反馈状态的自适应反馈控制器。文献[20]及[21]针对混沌系统参数不确定性分别设计了非奇异终端滑模控制器, 对于两种

*此项工作得到江苏省自然科学基金和中央高校基本科研业务费专项资金资助, 项目批准号: BK20140829, NS2016024.

不同的混沌系统，通过引入非奇异终端滑模面及自适应滑模控制器解决了有限时间内的同步。

然而，实际系统中控制信号应该相对简单以便于其实际应用，可以通过基于理想控制信号的简化控制输入或是其静态反馈信号（而非动态或自适应反馈信号）予以实施。例如文献[22]针对有限时间混沌控制，应用串联系统稳定性理论提出了一种非线性控制方法，其设计的控制器比较简单易于实现。但其混沌系统的有限时间镇定是通过三个控制输入实现。本文着眼于通过静态状态反馈的单一控制信号解决混沌系统的有限时间镇定问题。实际上，静态状态反馈控制在实际应用中具有可靠性较高，实际应用过程中低成本等特点。文献[23]针对静态反馈控制作了全面综合的论述，可知目前对非线性系统的静态反馈控制的研究远远少于线性系统^{[24][25]}。因此，对于该方面而言，本文具有重要的研究意义。

本文结构如下：第二部分初步阐述了相关理论；第三部分给出了主要的控制设计结果；第四部分针对理论设计结果做了数值模拟验证，并且对相关设计方法中的重要问题进行了讨论。

2 预备知识

本节给出有限时间镇定问题的相关理论及定义。

定义：对于三维混沌系统 $\dot{x}=f(x)$ ，其中 $x=(x_1 \ x_2 \ x_3)^T \in R^3$ ， $f:R^3 \rightarrow R^3$ 为光滑非线性向量函数， x_e 为其平衡点。如果存在常数 $T>0$ ，使得当 $\lim_{t \rightarrow T} \|x(t)\|=0$ ， $\|x(t)\|=0$ 时 $t \geq T$ ，则称该混沌系统可以在有限时间内达到稳定状态。

下面是有限时间镇定问题的相关结论^[15]：

引理1：如果存在连续且正定的函数 $V(x)$ ，满足 $\dot{V}(x) \leq -cV^\eta(x)$ ， $\forall t \geq t_0$ 且 $V(x_0) \geq 0$ ，其中 $c>0$ ， $0<\eta<1$ 为常数，则混沌系统 $\dot{x}=f(x)$ 在有限时间内稳定。并且，对于 $t \geq T$ 有 $\|x(t)\|=0$ ， $T=t_0 + \frac{V^{1-\eta}(t_0)}{c(1-\eta)}$ 成立。

3 主要结论

为了便于说明问题，现给出以下假设：

假设：存在非奇异坐标等价变换 $y=Tx$ （变量阶次变换一致），使得三维混沌系统 $\dot{x}=f(x)$ 变为以下形式：

$$\dot{z}_1 = g_1(z_1, z_2), \dot{z}_2 = g_2(z_1, z_2) \quad (1)$$

式中， $z_1 = y_1$ ， $z_2 = (y_2 \ y_3)^T$ ，其中， $\dot{z}_2 = g_2(z_1, z_2)$ 在 $z_1 = 0$ 邻域内光滑，同时当 $z_2 = 0$ 时， $\forall z$ 使得 $\dot{z}_2 = g_2(0, z_2)$ 保持一致指数稳定。

说明：多数已知的混沌系统可以表示为形式(1)，但并非所有的三维混沌系统。尽管上述假设限制了所研究混沌系统的范围，但仍包括许多重要且有意义的混沌系统。

在上述假设条件下， $z_1 = 0$ 邻域内可以找到一个正数 λ_1 ，满足：

$$\|g_2(z_1, z_2) - g_2(0, z_2)\| \leq \lambda_1 \|z_1\| \quad (2)$$

同时，存在 z ，使得 $z_2 = 0$ 时，满足 $\dot{z}_2 = g_2(0, z_2)$ 一致指数稳定，并可以得到，存在李雅普诺夫函数 $V_0(z_2)$ 以及两个正数 λ_2, λ_3 ，使得：

$$\dot{V}_0(z_2) = \frac{\partial V_0(z_2)}{\partial z_2} g_2(0, z_2) \leq -\lambda_2 \|z_2\|^2 \quad (3)$$

$$\left\| \frac{\partial V_0(z_2)}{\partial z_2} \right\| \leq \lambda_3 \|z_2\| \quad (4)$$

成立。

此外，由于 $g_1(z_1, z_2)$ 光滑连续，可以找到一个正数 λ_4 满足，

$$\|g_1(z_1, z_2)\| \leq \lambda_4 \|z_1\| \quad (5)$$

下面为本文主要定理：

定理1：考虑以下单输入，三维混沌控制系统：

$$\dot{z}_1 = g_1(z_1, z_2) + u_1, \dot{z}_2 = g_2(z_1, z_2) \quad (6)$$

如果有以下条件成立：

$$z_1 g_1(z_1, z_2) + z_1 k(z_1, z_2) + \frac{\partial V_0(z_2)}{\partial z_2} g_2(z_1, z_2) \leq 0 \quad (7)$$

其中， $k(z_1, z_2)$ 为 z_1, z_2 构成的多项式，那么闭环系统有限时间镇定的单输入静态状态反馈控制信号为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= k(z_1, z_2) - \frac{cV^\eta(z_1, z_2)}{z_1} \\ V(z_1, z_2) &= \frac{1}{2} z_1^2 + V_0(z_2) \end{aligned} \right\} \text{if } z_1 \neq 0 \quad (8)$$

$$u_1 = 0 \text{ if } z_1 = 0$$

证明：考虑可选择的李雅普诺夫函数 $V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + V_0(z_2)$ ，按照(6)的状态变化轨迹可得：

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2) &= z_1 \dot{z}_1 + \frac{\partial V_0(z_2)}{\partial z_2} g_2(z_1, z_2) \\ &= z_1 \left[g_1(z_1, z_2) + k(z_1, z_2) - \frac{cV^\eta(z_1, z_2)}{z_1} \right] + \frac{\partial V_0(z_2)}{\partial z_2} g_2(z_1, z_2) \\ &= z_1 g_1(z_1, z_2) + z_1 k(z_1, z_2) - cV^\eta(z_1, z_2) + \frac{\partial V_0(z_2)}{\partial z_2} g_2(z_1, z_2) \\ &\leq -cV^\eta(z_1, z_2) \end{aligned}$$

因此，由引理1可得，混沌系统(6)在有限时间 $T = t_0 + \frac{V^{1-\eta}(t_0)}{c(1-\eta)}$ 内达到了稳定状态。

定理2：对于三维混沌控制系统(6)，如果单输入静态反馈控制信号为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= k_1 z_1 - \frac{cV^\eta(z_1, z_2)}{z_1} \text{ if } z_1 \neq 0 \\ u_1 &= 0 \text{ if } z_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

则可实现闭环系统有限时间镇定，其中静态增益 k_1 应满足以下条件：

$$k_1 \leq -\lambda_4 - \frac{\lambda_1^2 \lambda_3^2}{4\lambda_2} \quad (10)$$

证明：条件(7)中，将 $k(z_1, z_2) = k_1 z_1$ 代入后，可以得到：

$$z_1 g_1(z_1, z_2) + k_1 \|z_1\|^2 + \frac{\partial V_0(z_2)}{\partial z_2} g_2(z_1, z_2) \leq 0.$$

或：

$$z_1 g_1(z_1, z_2) + k_1 \|z_1\|^2 + \frac{\partial V_0(z_2)}{\partial z_2} [g_2(z_1, z_2) - g_2(0, z_2)] + \frac{\partial V_0(z_2)}{\partial z_2} g_2(0, z_2) \leq 0 \quad (11)$$

进一步，由条件(2)至(5)可得：

$$z_1 g_1(z_1, z_2) \leq \lambda_4 \|z_1\|^2,$$

$$\frac{\partial V_0(z_2)}{\partial z_2} [g_2(z_1, z_2) - g_2(0, z_2)] \leq \lambda_1 \lambda_3 \|z_1\| \|z_2\|$$

进而在满足式(11)条件下，可得以下不等式，

$$\lambda_4 \|z_1\|^2 + k_1 \|z_1\|^2 + \lambda_1 \lambda_3 \|z_1\| \|z_2\| - \lambda_2 \|z_2\|^2 \leq 0 \quad (12)$$

对于任意 z_1 和 z_2 ，如果满足 $\lambda_1^2 \lambda_3^2 + 4\lambda_2(k_1 + \lambda_4) \leq 0$ ，式(12)将成立，而上述不等式恰好是条件(10)。

需要强调的是，如果所增益 k_1 满足式(10)，即 $k_1 \leq -\lambda_4 - \frac{\lambda_1^2 \lambda_3^2}{4\lambda_2}$ ，那么由混沌系统(6)的李亚普诺夫函数 $V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + V_0(z_2)$ 将得到 $\dot{V}(t) \leq -cV^\eta(t)$ 。因此，

由单输入静态状态反馈控制(9)可以使系统实现有限时间内稳定。

说明：和控制信号(8)相比，控制信号(9)只采用了一个静态增益 $k(z_1, z_2) = k_1 z_1$ ，便于实现。而静态增益 k_1 仅受约束条件(10)限制。在某些情况下，虽然这一条件难以证明其成立，但这一方法对于混沌系统的边界特性提供了重要参考，即对于该类闭环系统，其有限时间稳点在 $t_0 + \frac{V^{1-\eta}(t_0)}{c(1-\eta)}$ 内。

4 仿真验证

本节给出了数值应用仿真，验证上面所述方法以及对控制器的实现做出相关讨论。考虑以下Lorenz混沌系统：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \gamma x_3 \end{aligned} \quad (13)$$

其中， $\alpha = 10$ ， $\beta = 28$ ， $\gamma = \frac{8}{3}$ 。通过坐标变换 $y = Tx$ ，

即 $y_1 = x_2$ ， $y_2 = x_1$ 和 $y_3 = x_3$ ，将式(13)代入可得单输入控制信号 u_1 ：

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 + \beta y_2 - y_2 y_3 + u_1 \\ \dot{y}_2 &= \alpha(y_1 - y_2) \\ \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - \gamma y_3 \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)中，令 $z_1 = y_1$ ， $z_2 = (y_2 \ y_3)^T$ ，其中子系统 $\dot{z}_2 = g_2(z_1, z_2)$ 在 $z_1 = 0$ 的邻域内光滑连续，而 $\dot{z}_2 = g_2(0, z_2)$ 在 $z_2 = 0$ 点一致指数稳定，满足本文所假设的前提条件。

现考虑李亚普诺夫函数 $V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + V_0(z_2) = \frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^T z_2)$ 。由定理1可知，当多项式 $k(z_1, z_2)$ 满足以下条件时，控制信号(8)可以使Lorenz混沌系统在有限时间内稳定：

$$k(y_1, y_2, y_3) y_1 - y_1^2 + (\alpha + \beta) y_1 y_2 - \alpha y_2^2 - \gamma y_3^2 \leq 0 \quad (15)$$

易知， $k(y_1, y_2, y_3)$ 可任意选择，但为了控制器便于实现，这里令静态增益 $k(z_1, z_2) = k_1 z_1$ ，或 $k(y_1, y_2, y_3) = k_1 y_1$ ，代入式(15)：

$$(k_1 - 1) y_1^2 + (\alpha + \beta) y_1 y_2 - \alpha y_2^2 - \gamma y_3^2 \leq 0 \quad (16)$$

对上述不等式化简：

$$k_1 \leq 1 - \frac{(\alpha + \beta)^2}{4\alpha} \quad (17)$$

进一步代入计算可得 $k_1 \leq -35.1$ ，这里取 $k_1 = -40$ ，代入可得静态反馈控制信号：

$$u_1 = -40 z_1 - \frac{cV^\eta(z_1, z_2)}{z_1} \quad (18)$$

基于定理1及上述分析可知，控制器(18)可以使Lorenz混沌系统在有限时间内稳定。选择初值为 $[y_1(0) \ y_2(0) \ y_3(0)] = [3 \ -1 \ -2]$ ， $c = 2$ ， $\eta = 0.5$ 的混沌系统，进行仿真验证，结果见图1至图3。

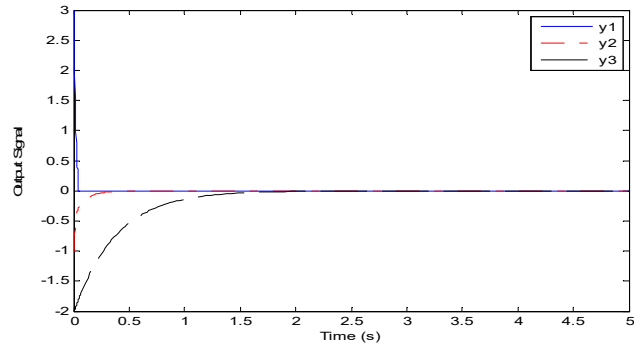


图1:单输入静态反馈控制的Lorenz混沌系统响应曲线

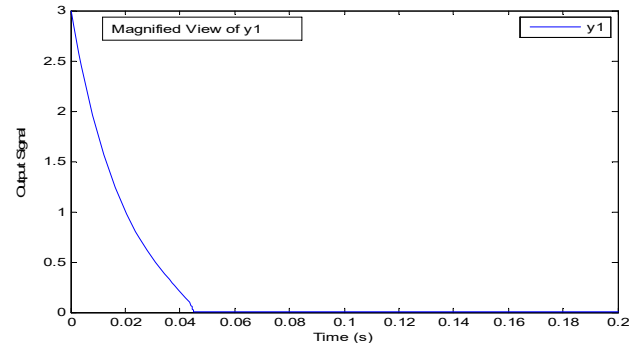


图2: 输出 y_1 局部放大效果

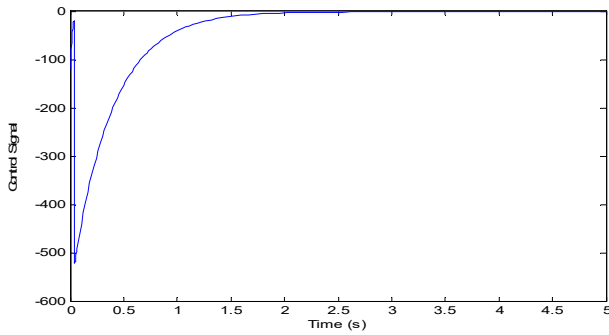


图3: 控制信号 u_1 响应变化

综合仿真结果及理论分析来看,有以下两点需要注意:

1) 在 Lorenz 系统 (13) 中, $\alpha = 25\sigma + 10$, $\beta = 28 - 35\sigma$, $\gamma = \frac{8 + \sigma}{3}$ 。当 $\sigma \in [0, 1]$ 时, Lorenz 系统 (13) 为混沌系统; 当 $\sigma \in [0, 0.8]$ 时, Lorenz 系统 (13) 为广义 Lorenz 系统; 特别地, 当 $\sigma = 0.8$ 时, 系统 (13) 则为广义 Lü 系统; 当 $\sigma \in [0.8, 1]$ 时, 系统 (13) 为广义 Chen 氏系统; 因而, 条件 (17) 实际上具有普适性, 可以解决一般情况下的混沌系统, 鉴于篇幅有限, 这里不再赘述。

2) 另一方面, 根据定理 1 得到的条件 (17) $k_1 \leq 1 - \frac{(\alpha + \beta)^2}{4\alpha}$, 同时, 根据定理 2, 得到增益 k_1 还应满足条件 (10) $k_1 \leq -\lambda_4 - \frac{\lambda_1^2 \lambda_3^2}{4\lambda_2}$ 。通过定理 2 的证明过程可以得知, 条件 (10) 过于保守, 但同条件 (17) 对比, 则可得到 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 和 λ_4 的估计值, 从另一角度看, 这也表明, $g_1(z_1, z_2)$, $g_2(z_1, z_2)$ 和 $V_0(z_2)$ 的边界性质难以确定。

说明 1: 常数 c 的选择: 由于稳定时间 $T = t_0 + \frac{V^{1-\eta}(t_0)}{c(1-\eta)}$,

控制信号 $u_1 = k_1 z_1 - \frac{cV^\eta(z_1, z_2)}{z_1}$, 所以常数 c 应在两者

之间折中选取。仿真结果表明: 控制作用效果与常数 c 的选取有很大关系, 通常较小的 c 具有更好的控制效果。实际上, 将常数 c 不同选择作为混沌控制系统的重要参数以此区分不同混沌系统考虑具有重要的研究价值。

说明 2: 关于增益 k_1 的不同选择, 并不会影响稳定时间 $t_0 + \frac{V^{1-\eta}(t_0)}{c(1-\eta)}$, 但却会影响控制作用及子系统

$\dot{z}_1 = g_1(z_1, z_2) + u_1$ 的变化。进一步仿真表明, $|k_1|$ ($k_1 < 0$) 越大, z_1 的瞬态响应越快。这也印证了其对于控制作用的影响, 但其对于混沌系统的内在作用机理却十分复杂难以厘清。

5 结论

本文通过单输入静态反馈控制方法设计了相关混沌系统有限时间镇定控制器。推理出相关定理结论, 并通过 Lorenz 混沌系统对其可行性进行验证。但有一个重要的问题, 并未进行讨论, 即本文中讨论问题基于假设子系统 $\dot{z}_2 = g_2(0, z_2)$ 为对于所有 z , 当 $z_2 = 0$ 时一致指数稳定, 当假设不成立时, 所设计控制是否可实现有限时间镇定控制仍未可知, 此问题将在接下来的研究中进一步讨论。

参考文献

- [1] E. Ott, C. Grebogi and J.A. Yorke, Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.* 1990, **64**: 1196-1199.
- [2] 张园, 徐琦, 孙明玮, 陈增强. 基于快速全线性预测控制的混沌系统控制与同步. *物理学报* 2015, **1**: 47-53.
- [3] 沈志萍, 郭依林. 不确定统一混沌系统平衡点的渐进稳定. *控制理论与应用* 2016, **33(1)**: 98-105.
- [4] G. Chen and X. Yu (eds.), *Chaos Control: Theory and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [5] J.M. González-Miranda, *Synchronization and Control of Chaos: an Introduction for Scientists and Engineers*. Imperial College Press, London, 2004.
- [6] E. Schöll and H.G. Schuster (eds.), *Handbook of Chaos Control*, Wiley-VCH, Weinheim, 2007.
- [7] A.L. Fradkov, *Chaos Control Bibliography (1997-2000)*, *Russian Systems and Control Archive (RUSYCON)*.
- [8] D. Chen, Y. Liu, X. Ma and R. Zhang, Control of a class of fractional-order chaotic systems via sliding mode, *Nonlinear Dynamics* 2012, **67(1)**: 893-901.
- [9] C. Yang, Adaptive synchronization of Lühyperchaotic system with uncertain parameters based on single-input controller, *Nonlinear Dynamics* 2011, **63(3)**: 447-454.
- [10] S. Bowong, Adaptive synchronization of chaotic systems with unknown bounded uncertainties via backstepping approach, *Nonlinear Dynamics* 2007, **49(1-2)**: 59-70.
- [11] S. Li, Y. Tian. Global stabilization of a coupled dynamo system, *Chaos, Solitons & Fractals*, (2003), **16(5)**, 787-793.
- [12] S. Li, Y. Tian. Setstabilization of a modified Chua's circuit, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 2005, **15(2)**, 597-604.
- [13] S. Ding and S. Li, A survey for finite-time control problems, *Control and Decision* 2011, **26(2)**.
- [14] V.T. Haimo, Finite time controllers, *SIAM J. Contr. Optim.* 1986, **24**: 760-770.
- [15] S.P. Bhat and D.S. Bernstein, Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators, *IEEE Transactions on Automatic Control* 1998, **43(5)**: 678-682.

- [16] Y. Hong, J. Huang, Y. Xu. On an output feedback finite-time stabilization problem, *IEEE Transactions on Automatic Control* 2001, **46(2)**: 305-309.
- [17] S. Seo, H. Shim, J.H. Seo. Global finite-time stabilization of a nonlinear system using dynamic exponent scaling, *Proc. 47th IEEE Conf. Decision and Control*, Cancun, Mexico, 2008.
- [18] R. Guo, Finite-time stabilization of a class of chaotic systems via adaptive control, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 2011, **17(1)**: 255-262.
- [19] W. Yu, Stabilization of three-dimensional chaotic systems via single state feedback controller, *Physics Letters A* 2010, **374**: 1488-1492.
- [20] H. Wang, Z. Han, Q. Xie, W. Zhang, Finite-time chaos control via non-singular terminal sliding mode control, *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation* 2009, **14(6)**: 2728-2733.
- [21] M.P. Aghababa, S. Khanmohammadi, G. Alizadeh, Finite-time synchronization of two different chaotic systems with unknown parameters via sliding mode technique, *Applied Mathematical Modelling* 2010, **35(6)**: 3080-3091.
- [22] H. Wang, Z. Han, Q. Xie, W. Zhang, Finite-time chaos control of unified chaotic systems with uncertain parameters, *Nonlinear Dynamics* 2009, **55(4)**: 323-328.
- [23] V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, K. Grigoriadis, Static output feedback: a survey, *Automatica* 1997, **33**: 125-137.
- [24] A. Astolfi, P. Colaneri, A Hamilton-Jacobi setup for the static output feedback stabilization of nonlinear systems, *IEEE Trans. Autom. Control* 2000, **47**: 2038-2041.
- [25] D. Zhao, J.L. Wang, Robust static output feedback design for polynomial nonlinear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 2010, **20**: 1637-1654.